PROF. DR.-ING. JÜRGEN BÄR
PROF. DR.-ING. HARALD ORTWIG
PROF. DR.-ING. UWE ZIMMERMANN

Hochschule Trier
Fachbereich Technik
Maschinenbau

Formelsammlung Höhere Mathematik

A. Allgemeines

1. Bildungsgesetz für Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}$$

B. Vektoren

1. Orthogonalität

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$$

2. Kollinearität

$$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$$

3. Komplanarität

$$\left[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right] = 0$$

4. Winkel zwischen 2 Vektoren

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}\right)$$

5. Richtungskosinus

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a},\quad \cos\beta = \frac{a_y}{a},\quad \cos\gamma = \frac{a_z}{a},\qquad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

6. Projektion eines Vektors b auf einen Vektor a

$$\vec{b}_a = \left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\right)\cdot\vec{a}$$

7. Abstand Punkt - Gerade

$$d = \frac{\left|\vec{a}\times\left(\vec{r}_Q - \vec{r}_1\right)\right|}{|\vec{a}|}$$

8. Abstand zweier windschiefer Geraden

$$d = \frac{\left|\left[\vec{a}_1\vec{a}_2\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right)\right]\right|}{\left|\vec{a}_1\times\vec{a}_2\right|}$$

9. Abstand Punkt - Ebene

$$d = \frac{\left|\vec{n}\cdot\left(\vec{r}_Q - \vec{r}_1\right)\right|}{|\vec{n}|}$$

10. Schnittpunkt Gerade - Ebene

$$\vec{r}_S = \vec{r}_1 + \left(\frac{\vec{n}\cdot\left(\vec{r}_0 - \vec{r}_1\right)}{\vec{n}\cdot\vec{a}}\right)\vec{a}$$

11. Schnittwinkel Gerade - Ebene

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{|\vec{n}\cdot\vec{a}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{a}|}\right)$$

C. Funktionen und Kurven

2-Punkte-Form einer Geraden

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Achsenabschnittsform

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

Scheitelpunktsform

$$y-y_0=a\left(x-x_0\right)^2$$

Kegelschnitte

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$$

Kreis: A=B; Ellipse: A•B>0, A≠B; Hyperbel: A•B<0; Parabel: A=0, B≠0 oder B=0, A≠0

1. Kreis: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$

2. Ellipse: $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$

3. Hyperbel: $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}-\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$

4. Parabel: $(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$

Additionstheoreme

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1$$

$$\sin(2x)=2\sin x\cos x$$

$$\sin\left(x_1\pm x_2\right)=\sin x_1\cos x_2\pm\cos x_1\sin x_2$$

$$\cos(2x)=\cos^2 x-\sin^2 x$$

$$\cos\left(x_1\pm x_2\right)=\cos x_1\cos x_2\mp\sin x_1\sin x_2$$

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}\left[1-\cos(2x)\right]$$

$$\tan\left(x_1\pm x_2\right)=\frac{\tan x_1\pm\tan x_2}{1\mp\tan x_1\tan x_2}$$

$$\cos^2 x=\frac{1}{2}\left[1+\cos(2x)\right]$$

Hyperbolische Funktionen

$$y=\sinh x=\frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)\qquad y=\cosh x=\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)\qquad \cosh^2 x-\sinh^2 x=1$$

D. Differentialrechnung

Ableitung einiger elementarer Funktionen

1. Arkusfunktionen

$$\frac{d}{dx}\arcsin x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};\quad \frac{d}{dx}\arccos x=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};\quad \frac{d}{dx}\arctan x=\frac{1}{1+x^2};\quad \frac{d}{dx}arc\cot x=-\frac{1}{1+x^2}$$

2. Allgemeine Exponential- und Logarithmusfunktionen

$$\frac{d}{dx}a^x=a^x\cdot\ln a;\qquad \frac{d}{dx}\log_a x=\frac{1}{x\cdot\ln a}$$

3. Hyperbelfunktionen

$$\frac{d}{dx}\sinh x=\cosh x;\quad \frac{d}{dx}\cosh x=\sinh x;\quad \frac{d}{dx}\tanh x=\frac{1}{\cosh^2 x};\quad \frac{d}{dx}\coth x=-\frac{1}{\sinh^2 x}$$

4. Areafunktionen

$$\frac{d}{dx}ar\sinh x=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}};\quad \frac{d}{dx}ar\cosh x=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}};\quad \frac{d}{dx}ar\tanh x=\frac{1}{1-x^2};\quad \frac{d}{dx}ar\coth x=\frac{1}{1-x^2}$$

E. Integralrechnung

Ausgewählte Substitutionen

$\int f\left(x;\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$ Substitution: $x = a \cdot \sin u$

$\int f\left(x;\sqrt{x^2+a^2}\right)dx$ Substitution: $x = a \cdot \sinh u$

$\int f\left(x;\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$ Substitution: $x = a \cdot \cosh u$

Anwendungen

1. Rotationsvolumina

$$V_x = \pi \cdot \int_a^b y^2 dx; \quad V_y = \pi \cdot \int_c^d x^2 dy;$$

2. Bogenlänge einer ebenen Kurve

$$s = \int_a^b \sqrt{1+\left(y'\right)^2}$$

3. Mantelflächen

$$M_x = 2\pi \cdot \int_a^b y \cdot \sqrt{1+\left(y'\right)^2}\,dx;$$

$$M_y = 2\pi \cdot \int_c^d x \cdot \sqrt{1+\left(x'\right)^2}\,dy$$

4. Mittelwerte

$$\overline{y}_{lin} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b y dx;$$

$$\overline{y}_{quadr} = \sqrt{\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b y^2 dx}$$

F. Folgen und Reihen

ausgewählte Konvergenzkriterien

1. Leibnitz

Notwendige Bedingung: $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots;$ hinreichende Bedingung: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

2. D´Alembert

Notwendige Bedingung.: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0;$ hinreichende Bedingung: $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q$

3. Cauchy

Notwendige Bedingung: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0;$ hinreichende Bedingung: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = q$

ausgewählte Reihen

1. Taylorreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n;$$

2. Binomialreihe

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k} x^k$$

G. Fourierreihen

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)\right]$$

mit

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x)dx\,; \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cdot\cos(nx)dx\,; b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cdot\sin(nx)dx$$

H. Komplexe Zahlen

1. Kartesische Form

$z = x + jy$;

2. Polarform

$z = r(\cos\varphi + j\sin\varphi)$;

3. Eulerform

$z = re^{j\varphi}$

Radizieren

$z_k = r(\cos\varphi_k + j\cdot\sin\varphi_k)$;

mit $r = \sqrt[n]{a_0}$ und $\varphi_k = \dfrac{\alpha + k\cdot 2\pi}{n}$

Natürlicher Logarithmus einer komplexen Zahl

$\ln z = \ln r + j(\varphi + k\cdot 2\pi)$

I. Funktionen mehrerer Veränderlicher

Totales Differential

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$$

Implizite Differentiation

$$y'(P) = -\frac{F_x(x;y)}{F_y(x;y)}$$

Extremwerte

1. Notwendige Bedingung

$f_x(x_0;y_0) = 0$ und $f_y(x_0;y_0) = 0$

2. Hinreichende Bedingung

$\Delta = f_{xx}(x_0;y_0)\cdot f_{yy}(x_0;y_0) - f_{xy}^2(x_0;y_0) > 0$

$\Delta < 0$: Sattelpunkt; $\Delta = 0$: keine Aussage

J. Differentialgleichungen

Differentialgleichungen 1. Ordnung

Typ: $y' + f(x)\cdot y = g(x)$

1. homogene Lösung:

$y_0 = C\cdot e^{-\int f(x)dx} \quad (C \in \Re)$

2. allgemeine Lösung:

Variation der Konstanten

$y = K(x)\cdot e^{-\int f(x)dx}$

Partikuläre Lösung

$y = y_0 + y_p$

Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Typ: $y'' + ay' + by = g(x)$

1. homogene Lösung: charakteristische Gleichung $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$

Fall 1: $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (reell)

$y_0 = C_1\cdot e^{\lambda_1 x} + C_2\cdot e^{\lambda_2 x}$;

Fall 2: $\lambda_1 = \lambda_2$ (reell)

$y_0 = (C_1 x + C_2)\cdot e^{\lambda x}$;

Fall 3: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\omega$ (konjugiert komplex)

$y_0 = e^{\alpha x}\left[C_1\cdot\sin(\omega x) + C_2\cdot\cos(\omega x)\right]$

2. allgemeine Lösung: $y = y_0 + y_p$