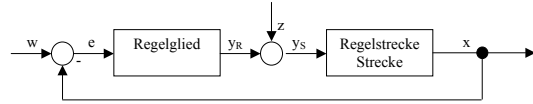


Wirkungsplan eines vereinfachten Regelkreises:



Beharrungsverhalten (statisches Verhalten) von Übertragungsgliedern

Lineare Übertragungsglieder: Geradengleichung $v = K_p \cdot u + v_0$ mit $K_p = \frac{\Delta v}{\Delta u}$

Linearisierung nicht linearer Übertragungsglieder im gewählten Arbeitspunkt:
Totales Differential $v \approx v_{(t)} + \frac{\partial v}{\partial u_1} \cdot \Delta u_1 + \frac{\partial v}{\partial u_2} \cdot \Delta u_2 + \dots$

Dynamisches Verhalten (Zeitverhalten) von Übertragungsgliedern

→ → **Proportionalglied oder P-Glied** $K_p = \text{Proportionalbeiwert}$

$$u_{(t)} = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ u_0 & \text{für } t \geq 0 \end{cases} \quad v_{(t)} = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ K_p \cdot u_0 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

$$h_{(t)} = \frac{v_{(t)}}{u_0} \quad h_{(t)} = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ K_p & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

→ → **Verzögerungsglied erster Ordnung oder P-T₁-Glied**

$T \cdot \dot{v} + v = K_p \cdot u$ mit $T = \text{Zeitkonstante}$ und $K_p = \text{Proportionalbeiwert}$

$$u_{(t)} = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ u_0 & \text{für } t \geq 0 \end{cases} \quad v_{(t)} = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ K_p \cdot u_0 \cdot (1 - e^{-t/T}) & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

$$h_{(t)} = \frac{v_{(t)}}{u_0} \quad h_{(t)} = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ K_p \cdot (1 - e^{-t/T}) & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

→ → **Integrierendes Glied oder I-Glied**

$\dot{v} = K_I \cdot u$ mit $\dot{v} = \frac{dv}{dt}$ und $K_I = \text{Integrierbeiwert}$

$$u_{(t)} = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ u_0 & \text{für } t \geq 0 \end{cases} \quad v_{(t)} = \begin{cases} v_0 & \text{für } t < 0 \\ K_I \cdot u_0 \cdot t + v_0 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

$$h_{(t)} = \frac{v_{(t)}}{u_0} \quad h_{(t)} = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ K_I \cdot t & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

→ → **Differenzierendes Glied oder D-Glied**

$v = K_D \cdot \dot{u}$ mit $\dot{u} = \frac{du}{dt}$ und $K_D = \text{Differenzierbeiwert}$

$$u_{(t)} = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ u_0 & \text{für } t \geq 0 \end{cases} \quad v_{(t)} = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ K_D \cdot \dot{u}_0 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

$$h_{(t)} = \frac{v_{(t)}}{u_0} \quad h_{(t)} = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ \delta_{(t)} & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

→ → **Differenzierendes Glied mit Verzögerung 1. Ordnung oder D-T₁-Glied**

$T \cdot \dot{v} + v = K_D \cdot \dot{u}$ mit $\dot{u} = \frac{du}{dt}$ und $K_D = \text{Differenzierbeiwert}$

$$u_{(t)} = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ u_0 & \text{für } t \geq 0 \end{cases} \quad v_{(t)} = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ \frac{K_D}{T} \cdot u_0 \cdot e^{-t/T} & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

$$h_{(t)} = \frac{v_{(t)}}{u_0} \quad h_{(t)} = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ \frac{K_D}{T} \cdot e^{-t/T} & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

→ → **Totzeitglied oder T_T-Glied** $T_T = \text{Totzeit}$

$$u_{(t)} = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ u_0 & \text{für } t \geq 0 \end{cases} \quad v_{(t)} = \begin{cases} 0 & \text{für } t < T_T \\ u_0(t - T_T) & \text{für } t \geq T_T \end{cases}$$

$$h_{(t)} = \frac{v_{(t)}}{u_0} \Rightarrow h_{(t)} = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ (t - T_T) & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

Verzögerungsglied 2. Ordnung oder P-T₂-Glied

$$\frac{1}{\omega_0^2} \cdot \ddot{v} + 2 \cdot \frac{\beta}{\omega_0} \cdot \dot{v} + v = K_p \cdot u$$

Lösungsansatz: $v = e^{\lambda t} \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\omega_0 \cdot \left[\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1} \right]$

FALL 1: $\beta = 0 \Rightarrow v = C_1 \cdot \cos(\omega t) + C_2 \cdot \sin(\omega t)$

FALL 2: $0 < \beta < 1 \Rightarrow v = e^{\beta t} \cdot (C_1 \cdot \cos(\omega t) + C_2 \cdot \sin(\omega t))$

FALL 3: $\beta = 1 \Rightarrow v = e^{\beta t} \cdot (C_1 + C_2 \cdot t)$ (aperiodischer Grenzfall)

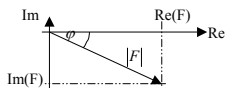
FALL 4: $\beta > 1 \Rightarrow v = C_1 \cdot e^{\beta_1 t} + C_2 \cdot e^{\beta_2 t}$

Für $\beta \geq 1$ gilt $T_1 \cdot T_2 \cdot \ddot{v} + (T_1 + T_2) \cdot \dot{v} + v = K_p \cdot u$ $\omega_0^2 = \frac{1}{T_1 \cdot T_2}$ $\beta = \frac{1}{2} \cdot \frac{T_1 + T_2}{T_1 \cdot T_2}$

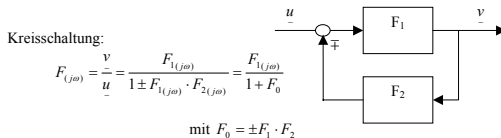
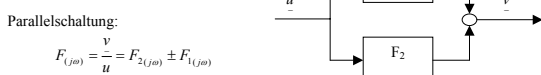
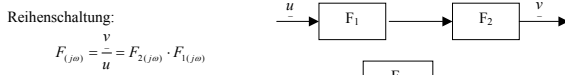
Frequenzgang $F_{(j\omega)} = \frac{v}{u} = \frac{V \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}}{U \cdot e^{j\omega t}} = \frac{b_n(j\omega)^n + \dots + b_1(j\omega) + b_0}{a_n(j\omega)^n + \dots + a_1(j\omega) + a_0} = \frac{V}{U} \cdot e^{j\varphi}$

$$|F_{(j\omega)}| = \frac{V}{U} \quad \varphi = \arctan\left(\frac{\text{Im}(F_{(j\omega)})}{\text{Re}(F_{(j\omega)})}\right) \quad |F_{(j\omega)}| = \sqrt{\text{Re}(F_{(j\omega)})^2 + \text{Im}(F_{(j\omega)})^2}$$

Darstellung in der Gauß'schen Zahlenebene (Ortskurve)



Frequenzgang zusammenschalteter Übertragungsglieder



Experimentelle Bestimmung des Frequenzganges

$|F_{(j\omega)}| = \frac{V}{U}$ und $\varphi = \varphi_v - \varphi_u = -\frac{t_e}{T} \cdot 360^\circ$ mit $T = \text{Periodendauer einer Schwingung}$
 $t_e = \text{zeitlicher Abstand u und v}$

Darstellung von Frequenzgängen im Bode-Diagramm

2 Diagramme:

- $|F|$ über ω im doppelt-logarithmischen Diagramm
- φ über ω im einfach-logarithmischen Diagramm

Regelstrecken

Statisches Verhalten von Strecken mit Ausgleich

$\Delta x = K_{PS} \cdot \Delta y$ oder $\Delta x = \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} \Big|_{y_0} \cdot \Delta y + x_0$ (nicht lineare Strecke)

$X_h = K_{PS} \cdot Y_h$ mit $X_h = \text{Regelbereich}$ und $Y_h = \text{Stellbereich} = H_{100}$

Dynamisches Verhalten von Strecken mit Ausgleich

P-T_k-Strecke: Dgl. k-ter Ordnung $a_n \cdot x^{(n)} + \dots + a_1 \cdot \dot{x} + x = K_{PS} \cdot y$

P-T₀-Strecke: $x = K_{PS} \cdot y$

P-T₁-Strecke: $T_S \cdot \dot{x} + x = K_{PS} \cdot y$ $x_{(t)} = \begin{cases} x_0 & \text{für } t < 0 \\ x_0 + K_{PS} \cdot \Delta y \cdot (1 - e^{-t/T_S}) & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$

P-T₂-Strecke: $\ddot{x} + 2\beta\omega_0 \cdot \dot{x} + \omega_0^2 \cdot x = K_{PS} \cdot \omega_0^2 \cdot y \Rightarrow \text{P-T}_2\text{-Glied (vgl. oben)}$

T₁-Strecke: $x_{(t)} = \begin{cases} x_0 & \text{für } t < T_1 \\ x_0 + \Delta y \cdot (t - T_1) & \text{für } t \geq T_1 \end{cases}$

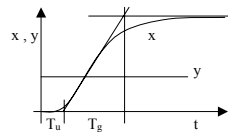
P-T₁T₁-Strecke: wie Reihenschaltung von T₁- und P-T₁-Glied

P-T_k-Strecken (nicht schwingungsfähig): Reihenschaltung von k P-T₁-Gliedern

$T_u = \text{Verzugszeit}$ $T_g = \text{Ausgleichszeit}$

Kann näherungsweise durch P-T₁-T₁-Strecke beschrieben werden:

$T_u = T_1$ und $T_g = T_S$ (Vgl. P-T₁-T₁-Strecke)



$\frac{T_u}{T_S} \approx \frac{T_u}{T_g} \approx \frac{T_u}{T_S}$	Schwierigkeit bei der Regelung	$\frac{T_u}{T_S} \approx \frac{k-1}{10}$ wenn T_1 bis T_k ungefähr gleich
kleiner 0,1	klein	$T_g = T_1$ und $T_u \approx T_2 + \dots + T_k$ wenn T_1 relativ groß zu T_2 bis T_k
etwa 0,2	mäßig	
größer 0,3	groß	

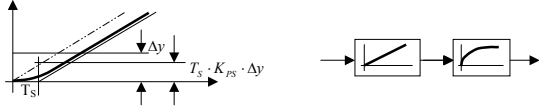
Ist noch ein Totzeitglied enthalten folgt: $T_{\text{eff}} = T_1 + T_u$ mit $T_{\text{eff}} = \text{Ersatztotzeit}$

Dynamisches Verhalten von Strecken ohne Ausgleich

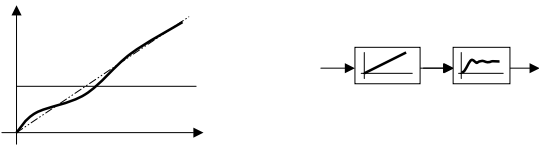
I-T_k-Strecken Dgl. k-ter Ordnung $a_n \cdot x^{(n)} + \dots + a_1 \cdot \dot{x} + x = K_{PS} \int_0^t y_i \cdot dt + x_0$

I-T₀-Strecke: $x = K_{IS} \cdot \int_0^t y_{(t)} \cdot dt + x_0$ mit $y_{(t)} = \text{konst} \Rightarrow x = K_{IS} \cdot y \cdot t + x_0$

I-T₁-Strecke: $T_S \cdot \dot{x} + x = K_{IS} \cdot \int_0^t y_{(t)} \cdot dt + x_0$ (Reihenschaltung I- und P-T₁-Glied)



I-T₂-Strecke: $a_2 \cdot \ddot{x} + a_1 \cdot \dot{x} + x = K_{IS} \cdot \int_0^t y_{(t)} \cdot dt + x_0$
(Reihensch. I- und P-T₂-Glied)



I-T₀-Strecken (nicht schwingungsfähig):

Verzögerung höherer Ordnung beschrieben durch Verzugszeit T_u (entspricht T_{IE})

Stetige Regleinrichtungen

Definition einiger Größen für zusammenschaltete Übertragungsglieder

$T_n = \frac{K_{PR}}{K_I}$ = Nachstellzeit $T_v = \frac{K_D}{K_{PR}}$ = Vorhaltzeit

P-Regleinrichtung

$\Delta y = -K_{PR} \cdot \Delta x$

$Y_h = K_{PR} \cdot X_p$ X_{pA} = bleibende Sollwertabweichung $\Delta x = -X_p$

$y - y_0 = K_{PR} \cdot (w - x)$

I-Regleinrichtung

$y - y_0 = K_I \cdot \int_0^t (w - x_{(t)}) \cdot dt = K_I \cdot \int_0^t e_{(t)} \cdot dt$ mit $|e| \leq X_{hR}$ mit X_{hR} = Regelbereich

$T_y = \frac{Y_h}{v_{y,max}}$ mit T_y = Stellzeit Sonderfall: $y = K_I \cdot e_0 \cdot t + y_0$ ($e_{(t)} = \text{konst}$)

PI-Regleinrichtung

$y - y_0 = K_{PR} \cdot e + K_I \cdot \int_0^t e_{(t)} \cdot dt$ => Parallelschaltung I- und P-Glied

$y - y_0 = K_{PR} \cdot \left(e + \frac{1}{T_n} \cdot \int_0^t e_{(t)} \cdot dt \right)$ $y = K_{PR} \cdot \frac{e_0}{T_n}$ = Steigung des Integrieranteils

PD-Regleinrichtung

$y - y_0 = K_{PR} \cdot e + K_D \cdot \dot{e} = K_{PR} \cdot \left(e + T_v \cdot \frac{de}{dt} \right)$ => Parallelschaltung D- und P-Glied

PD-T₁-Regleinrichtung

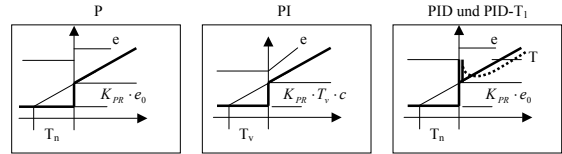
$T \cdot \dot{y} + y = K_{PR} \cdot e_0 \cdot \left(1 + \left(\frac{T_v}{T} \cdot s - 1 \right) \right) + y_0$ => mit Verzögerung 1. Ordnung ($e_{(t)} = e_0 = \text{konst.}$)

PID-Regleinrichtung

$y - y_0 = K_{PR} \cdot \left(e + \frac{1}{T_n} \cdot \int_0^t e_{(t)} \cdot dt + T_v \cdot \dot{e} \right)$ => Parallelschaltung D-, I- und P-Glied

PID-T₁-Regleinrichtung

$T \cdot \dot{y} + y - y_0 = K_{PR} \cdot \left(e + \frac{1}{T_n} \cdot \int_0^t e_{(t)} \cdot dt + T_v \cdot \dot{e} \right)$ => mit Verzögerung 1. Ordnung ($e_{(t)} = e_0 = \text{konst.}$)



Reglereinstellung

Übertragungsverhalten von Regelkreisen gegliedert bezüglich

Führungsverhalten

$F_{(j\omega)} = \frac{x}{w} = \frac{F_{V(j\omega)}}{1 + F_{0(j\omega)}}$

$F_{V(j\omega)} = F_{R(j\omega)} \cdot F_{S(j\omega)}$
 $F_{0(j\omega)} = F_{V(j\omega)} \cdot F_{Rück(j\omega)}$

Störverhalten

$F_{Z(j\omega)} = \frac{z}{w} = \frac{F_{Z(j\omega)}}{1 + F_{0(j\omega)}}$

$F_{Z(j\omega)} = F_{S(j\omega)}$ und $F_{0(j\omega)} = F_{R(j\omega)} \cdot F_{S(j\omega)}$

Statisches Übertragungsverhalten von Regelkreisen

Regelkreise mit P-Regler und Strecke mit Ausgleich (auch PD-Regleinrichtungen)

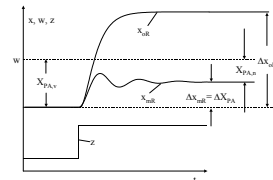
$\Delta x_{st} = \frac{\Delta x_{st}}{1 + K_{PR} \cdot K_{PS}}$ (für Störgrößenänderung)

mit $R = \frac{1}{1 + K_{PR} \cdot K_{PS}}$ (Regelfaktor)

$\Delta x_{pA} = X_{pA,n} - X_{pA,v} = \Delta x_{st}$

$V_o = K_{PR} \cdot K_{PS}$ (Kreisverstärkung)

$\Delta x_{pA} = -R \cdot \Delta w$ (für Führungsgrößenänderung) $x_{pA} = x - w$



Dynamisches Verhalten von Regelkreisen mit Totzeitstrecken

P-Regler mit P-T₁-Strecke

$V_{o,br} = K_{PR,br} \cdot K_{PS} = 1$

$\tau_{br} = 2 \cdot T_i$

$V_{o,zul} = 0.5 \cdot V_{o,br} = 0.5$ $R_{zul} = \frac{1}{1 + V_{o,zul}} = 0.67$

I-Regler und P-T₁-Strecke

$\Delta x = K_{PS} \cdot \Delta y$ für $t \geq T_i$ $\Rightarrow \dot{y} = -K_I \cdot \Delta x$ $K_{I,br} = \frac{\pi}{2 \cdot K_{PS} \cdot T_i}$ $\tau_{br} = 4 \cdot T_i$

$K_{I,zul} = \frac{\pi}{4 \cdot K_{PS} \cdot T_i}$ Abschätzung der Ausregelzeit: $T_{aus} > \tau_{br}$ oder $T_{aus} \geq 4 \cdot T_i$

P-Regler mit P-T₁-T₂-Strecke

$V_{o,br} = K_{PR,br} \cdot K_{PS} \approx \frac{\pi}{2} \cdot \frac{T_S}{T_i} + 1$ mit $\tau_{br} \approx 2 \cdot T_i$ für $T_i \gg T_S$
 $\tau_{br} \approx 4 \cdot T_i$ für $T_i \ll T_S$

$K_{PR,opt} \approx \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{T_S}{T_i} + 1 \right) \cdot \frac{1}{2 \cdot K_{PS}}$ $K_{PR,opt} \approx \frac{\pi \cdot T_S}{4 \cdot K_{PS} \cdot T_i}$ für $\frac{T_i}{T_S} \gg 1$

mit $Y_h = K_P \cdot X_p$ folgt: $X_{p,opt} \approx \frac{4 \cdot K_{PS} \cdot T_i \cdot Y_h}{\pi \cdot T_S}$

Näherungsformel für Strecke höherer Ordnung mit Ausgleich:

$X_{p,opt} \approx 1.3 \cdot K_{PS} \cdot Y_h \cdot \frac{T_i}{T_S}$

Optimale Reglereinstellung

Definitionen: T_{an} = Anregelzeit T_{aus} = Ausregelzeit v_m = Überschwingsweite

$v_{m,rel} = \frac{v_m}{\Delta x_{st}} \cdot 100\%$

Opt. Reglereinstellung nach den Kenngrößen der Streckensprungantwort

Werte sind aus Tabellen erchenbar, wenn das Verhalten des Regelkreises bekannt ist.

Reglereinstellung nach der Stabilitätsgrenze

Werte werden nach Festlegung der Einstellwerte bei Erreichen der Stabilitätsgrenze nach Tabellen ermittelt (nach Ziegler und Nichols).

Stabilität

Die Stabilität ist eine Systemeigenschaft!

Algebraisches Stabilitätskriterium: Imaginärteile der charakteristischen Wurzel <0 => stabil
Imaginärteile der charakteristischen Wurzel = 0 => Stabilitätsrand

Hurwitz-Kriterium:

- 1) Alle Koeffizienten der homogenen Dgl. vorhanden und gleiches Vorzeichen
- 2) Hurwitz-Determinante und ihre Unterdeterminanten > 0 (für = 0 => Stab.-Rand)

$$H = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & & & \\ & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & & \\ \dots & & & & a_3 & a_1 & a_0 \\ & & & & a_4 & a_2 & a_0 \\ & & & & a_5 & a_3 & a_1 \end{vmatrix}$$

Nyquist-Kriterium: (ist ein algebraisches Stabilitätskriterium)

Notwendige Bedingungen:

- 1) Frequenzgang des aufgeschnittenen Regelkreises muss bekannt sein
- 2) Kriterium liefert die Stabilitätsaussage für den geschlossenen Regelkreis
- 3) Aufgeschnittener Regelkreis muss stabil sein oder integrierendes Verhalten aufweisen (bei bekannten Übertragungsgliedern ohne Rückkopplung).

Hinreichende Bedingung:

- 1) Ortskurve des Frequenzganges des aufgeschnittenen Regelkreises schneidet mit zunehmender Kreisfrequenz die reelle Achse rechts vom Punkt (-1)

Amplituden- und Phasenreserve:

Amplitudenreserve $A_R = \frac{1}{|F_{0(j\omega_c)}|}$ mit ω_c = Phasenschnittkreisfrequenz mit $\phi_0(\omega_c) = -180^\circ$

Phasenreserve $\alpha_R = \phi_0(\omega_D) + \pi$ mit ω_D = Durchtrittskreisfrequenz ($w_0 |F_{0(j\omega_D)}| = 1$)

Stabilitätsrand: $A_R = 1$ Stabilitätsrand: $\alpha_R = 0^\circ$

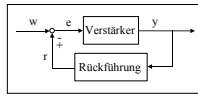
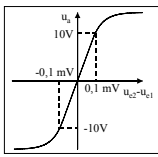
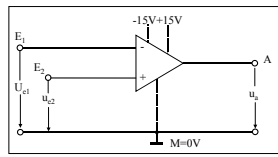
Empfehlungen für Regelkreise mit gutem

$1.5 < A_R < 3.0$ $20^\circ < \alpha_R < 70^\circ$ $4 < A_R < 10$ $40^\circ < \alpha_R < 60^\circ$

Realisierung von Regelkreisen durch Rückführung:

$$F = \frac{F_v}{1 + F_v \cdot F_r} = \frac{1}{\frac{1}{F_v} + F_r} \Rightarrow F_v = K_p \Rightarrow F = \frac{1}{\frac{1}{K_p} + F_r} \Rightarrow \text{mit } K_p \rightarrow \infty \Rightarrow F \approx \frac{1}{F_r}$$

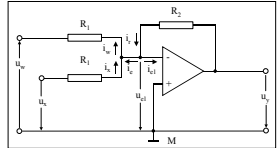
Operationsverstärker:



Linear im Bereich von hinreichend kleinen Spannungsdiff.
- Verstärkungsfaktor $V = 10^5$
- $E_1 \Rightarrow$ invertierender Eingang
- $E_2 \Rightarrow$ nichtinvertierender Eingang

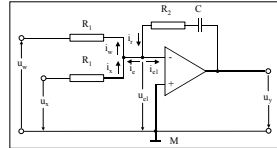
* da $R \rightarrow \infty \Rightarrow i_{i1} \approx 0$ * da $i_{i2} \approx 0 \Rightarrow u_{e1} \approx u_{e2}$ * $\Delta u_e \approx 0$
* mit $V \rightarrow \infty$ wird Δu_e zur Ausgangsspannung zwischen -10 und +10V verstärkt

Elektronischer P-Regler



$$u_a = -\frac{R_2}{R_1} \cdot (u_w - u_z) = -K_p \cdot (u_w - u_z)$$

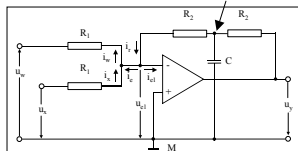
Elektronischer PI-Regler



$$\dot{u}_y = \frac{R_2}{R_1} \cdot \left(\frac{d}{dt}(u_w - u_z) + \frac{1}{R_2 \cdot C} \cdot (u_w - u_z) \right) = K_{PR} \cdot \left(\dot{e} + \frac{1}{T_D} \cdot e \right)$$

Rückführung: D-T₁-Verhalten $\Rightarrow K_D = C, T = R_2 \cdot C$
 $R_2 \cdot C \cdot \dot{I}_r + I_r = C \cdot \dot{u}_y$

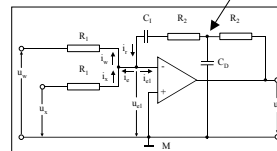
Elektronischer PD-Regler



$$u_y = \frac{2 \cdot R_2}{R_1} \cdot \left((u_w - u_z) + \frac{1}{2} \cdot R_2 \cdot C \cdot \frac{d}{dt}(u_w - u_z) \right)$$

$$K_{PR} = 2 \cdot \frac{R_2}{R_1} \quad T_D = \frac{1}{2} \cdot R_2 \cdot C$$

Elektronischer PID-Regler



$$u_y = \frac{R_2}{R_1} \cdot \left(\left(2 + \frac{C_D}{C_I} \right) \cdot e + \frac{1}{R_2 \cdot C_I} \cdot \int e \, dt + R_2 \cdot C_D \cdot \dot{e} \right)$$

$$K_{PR} = \frac{R_2}{R_1} \cdot \left(2 + \frac{C_D}{C_I} \right) \quad T_D = R_2 \cdot C_I \cdot \left(2 + \frac{C_D}{C_I} \right) \quad T_I = \frac{R_2 \cdot C_D}{2 + \frac{C_D}{C_I}}$$

Mathematische Behandlung einfacher Regelkreise

Vorgehensweise:

- 1) Zeichnen des Wirkungsplanes
- 2) Aufstellen der Gleichungen von Regler und Strecke
- 3) Herleitung der Differentialgleichung des Regelkreises ($\dots + x = \dots w + \dots z$)
- 4) Vereinfachung der Differentialgleichung
- 5) Diskussion und evtl. Lösung der Differentialgleichung

P-Regler und P-T₁-Strecke

$$\frac{T_s}{1 + V_0} \cdot \dot{x} + x = \frac{V_0}{1 + V_0} \cdot w + \frac{K_s}{1 + V_0} \cdot z$$

Untersuchung des Störverhaltens des Regelkreises

$$\Delta x_{or} = K_s \cdot \Delta z \quad \text{mit } X_{PA} = \frac{K_s}{1 + V_0} \cdot \Delta z \quad \text{folgt für die Änderung der Regelabweichung } \Delta X_{PA} = R \cdot \Delta X_{or}$$

Untersuchung des Führungsverhaltens des Regelkreises

$$X_{PA} = x - w \quad \text{mit } x = \frac{V_0}{1 + V_0} \cdot w + \frac{K_s}{1 + V_0} \cdot z \quad \text{folgt } X_{PA} = -\frac{1}{1 + V_0} \cdot w + \frac{K_s}{1 + V_0} \cdot z \quad \text{mit } \Delta X_{PA} = X_{PA,2} - X_{PA,1}$$

$$\text{folgt } \Delta X_{PA} = -\frac{1}{1 + V_0} \cdot w_2 - \frac{1}{1 + V_0} \cdot w_1 = -R \cdot \Delta w \quad \text{Für die Ausregelzeit gilt: } T_{am} \approx 4 \cdot \frac{T_s}{1 + V_0}$$

I-Regler und P-T₁-Strecke

$$\frac{T_s}{K_{IR} \cdot K_S} \cdot \ddot{x} + \frac{1}{K_{IR} \cdot K_S} \cdot \dot{x} + x = w + \frac{1}{K_{IR}} \cdot \dot{z} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{K_{IR} \cdot K_S}{T_s}} \quad D = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{K_{IR} \cdot K_S} \cdot T_s}$$

Untersuchung des Führungsverhaltens des Regelkreises

$$x = w_1 + \Delta w \cdot \left[1 - \frac{e^{-D \omega_0 t}}{\sqrt{1 - D^2}} \cdot \sin(\sqrt{1 - D^2} \cdot \omega_0 t + \arccos D) \right] \quad \sqrt{1 - D^2} \cdot \omega_0 = \omega \quad \arccos D = \varphi$$

Die Kreisfrequenz liefert Maß für die Ausregelzeit $T_{am} \Rightarrow$ hier gilt (schwache Dämpfung): $T_{am} \geq \tau = \frac{2\pi}{\omega}$

Untersuchung des Störverhaltens des Regelkreises

Anfangsbed.: $x_{(t=0)} = w$ und $\dot{x}_{(t=0)} = \frac{K_S}{T_s} \cdot \Delta z = \frac{\Delta x_{or}}{T_s}$ und damit ist die Gleichung der Störsprungantwort

$$x = w + \frac{2D}{\sqrt{1 - D^2}} \cdot \Delta x_{or} \cdot e^{-\frac{t}{T_s}} \cdot \sin\left(\frac{2D}{\sqrt{1 - D^2}} \cdot \frac{t}{T_s}\right)$$

$$\Rightarrow \text{Maximum } (\dot{x} = 0) \text{ bei } t_m = \frac{2D}{\sqrt{1 - D^2}} \cdot T_s \cdot \arctan\left(\frac{\sqrt{1 - D^2}}{D}\right) \quad \text{und auch hier gilt } T_{am} \geq \tau = \frac{2\pi}{\omega}$$

I-Regler und I-Strecke (strukturinstabil)

$$\frac{1}{K_{IR} \cdot K_{IS}} \cdot \ddot{x} + x = w - \frac{1}{K_{IR}} \cdot \dot{z} \quad \omega_0 = \sqrt{K_{IR} K_{IS}} \quad D = 0$$

$$\text{Lösung der Dgl ergibt: } x = w - \sqrt{\frac{K_{IR}}{K_{IS}}} \cdot \Delta z \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)$$

Zweipunktregler

Schaltendifferenz $X_{SD} = x_{ob} - x_{min}$

$$\text{Sollwert } x_w = \frac{x_{ob} + x_{min}}{2}$$

$$\frac{y_w}{x_h} = \frac{x_w}{x_h} \quad (w = 0,5 \cdot x_h)$$

Zweipunktregler und P-T₁-Strecke

$$\text{Für } w = 0,5 \cdot x_h \text{ gelten folgende Beziehungen: } \frac{t_1}{X_{SD}} = \frac{T_s}{0,5 \cdot X_h} \Rightarrow \tau = 4 \cdot \frac{X_{SD}}{X_h} \cdot T_s \Rightarrow \ddot{u} = 100\%$$

$$\text{Für beliebige Sollwertlagen gilt: } \tau = 4 \cdot \frac{X_{SD} \cdot X_h}{w \cdot (X_h - w)} \cdot T_s \quad \ddot{u} = \frac{X_h - w}{w} \cdot 100\%$$

$$\text{Bei P-T}_1\text{-Strecke gilt: } \Delta x = x_{max} - x_{min} = X_{SD} \quad y_m = \frac{t_{min}}{\tau} \cdot Y_h$$

Zweipunktregler mit P-T₁T₂-Strecke

$$\Delta x < X_{SD} + X_h \cdot \frac{T_2}{T_s} \quad \text{und für } w = 0,5 \cdot X_h \text{ gilt } \tau = 4 \cdot \frac{X_{SD}}{X_h} \cdot T_s + 4 \cdot T_1 \quad X_{PA} = \left(\frac{X_h}{2} - w^* \right) \cdot \frac{T_1}{T_s}$$

w^* = Abstand Sollwert vom Anfang des Regelbereiches

Zweipunktregler mit Strecke höherer Ordnung

$$\Delta x < X_{SD} + X_h \cdot \frac{T_2}{T_s} \quad \tau_{min} = 4 \cdot \frac{X_{SD}}{X_h} \cdot T_g + 4 \cdot T_n \quad X_{PA} = \left(\frac{X_h}{2} - w^* \right) \cdot \frac{T_n}{T_g} \quad X_{PA} = x_m - w$$

Zweipunktregler mit I-Strecke

$$\tau = t_1 + t_2 = \frac{X_{SD}}{\dot{x}_1} + \frac{X_{SD}}{[\dot{x}_2]} = \frac{X_{SD}}{K_{IS} \cdot (Y_h - z)} + \frac{X_{SD}}{K_{IS} \cdot z} = \frac{X_{SD}}{K_{IS}} \cdot \left(\frac{1}{Y_h - z} + \frac{1}{z} \right) \quad \Delta x = X_{SD}$$

Zweipunktregler mit I-T₁-Strecke (I-T₀-Strecke)

$$\Delta x = X_{SD} + K_{IS} \cdot Y_h \cdot T_1 \quad X_{PA} = \frac{1}{2} \cdot K_{IS} \cdot (Y_h - 2 \cdot z) \cdot T_1 \quad (\text{I-T}_0\text{-Strecke } \Rightarrow T_1 = T_n)$$

$$\tau_{min} = 4 \cdot \frac{X_{SD}}{K_{IS} \cdot Y_h} + 4 \cdot T_1 \quad (\text{für } z = 0,5 \cdot Y_h)$$

Regelrichtung mit Zweipunktregler und Rückführung

$$\text{Für } \tau \ll T_s \text{ gilt: } \Delta x = \frac{X_h}{4 \cdot T_s} \cdot \tau \quad \text{ohne Rückführung ist jedoch } \tau_{min} = 4 \cdot T_1 \text{ bzw. } 4 \cdot T_n$$

$$\text{und damit: } \Delta x = \frac{X_h}{4 \cdot T_s} \cdot 4 \cdot T_1 = X_h \cdot \frac{T_1}{T_s} \quad \text{bzw. } X_h \cdot \frac{T_n}{T_s}$$

\Rightarrow Rückführung mit P-T₁-Verhalten:

$$\tau = 4 \cdot \frac{X_{SD}}{Y_h \cdot K_r} \cdot T_r \quad \text{mit } K_r = \text{Proportionalbeiwert und } T_r = \text{Zeitkonstante der Rückführung}$$

\Rightarrow Regler zeigt PD-Verhalten mit $X_p = K_r \cdot Y_h$ für $K_r \cdot Y_h \gg X_{SD}$ und $T_r = T_1$

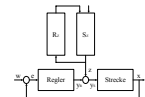
$$\text{Zur Reglereinstellung Formeln des PD-Reglers: } X_p = 0,83 \cdot K_{IS} \cdot Y_h \cdot \frac{T_n}{T_g} \quad \text{und } T_v = 0,25 \cdot T_n$$

$$\Rightarrow \text{auch hier gilt: } \Delta X_{PA} = \frac{1}{1 + V_0} \cdot x_{or} \quad \text{mit } V_0 = \frac{X_h}{X_p} \quad X_{PA} = -0,5 \cdot X_p$$

Vermaschte Regelkreise

Vorregelung von Störgrößen

\Rightarrow nur anwendbar, wenn Störgröße mess- und beeinflussbar



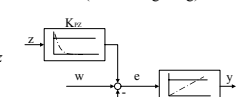
Störgrößenaufschaltung
 \Rightarrow ausschließlich zur Verbesserung des Störverhaltens dynamisch und statisch (wie Vorregelung)

$$y = K_{PR} \cdot (w - x + K_{PZ} \cdot z) + y_0$$

P-Regler: starre Aufschaltung $\Rightarrow w - x + K_{PZ} \cdot z = 0$

I-Regler: nachgebende Aufschaltung da sonst $\Rightarrow w - x = -K_{PZ} \cdot z$

Stabilität des Regelkreises wird nicht beeinflusst!



Kaskadenregelung

Hilfsregelgröße ist eine Größe der Strecke, die wie die Regelgröße durch die Stellgröße beeinflusst wird
Führungsgröße des Hilfsreglers ist Stellgröße des Hauptreglers $\Rightarrow y_R = w_h$
Vorteile:
- besseres Störverhalten
- Erhöhung der Dämpfung möglich (Lageregelung)
- Begrenzung der Hilfsregelgröße
- Kennlinie des 1. Streckenabschnitts linearisiert

Regelung mit Vorsteuerung

Durch Kombination von Steuerung und Regelung Verbesserung des Führungsverhaltens
Dazu muss aus der Führungsgröße eine oder mehrere Korrekturgrößen gebildet und an richtiger Stelle dem Regelkreis aufgeschaltet werden

Typisches Beispiel: Lageregelung \Rightarrow für $\dot{w} = \text{konst}$ gilt $w - x = x_{d,stat} = \text{konst.}$ als Schleppabstand bezeichnet

$$\Rightarrow \text{Geschwindigkeitsverstärkung: } K_v = \frac{\dot{x}}{x_{d,stat}} \left[\frac{mm/s}{mm} \right] \Rightarrow \text{Korrekturgröße: } K_D = \frac{1}{K_p}$$

Problem der Realisierung eines D-Gliedes \Rightarrow D-T₁-Glied in Kombination mit verzögerter (P-T₁) Führungsgrößenaufschaltung \Rightarrow Geschwindigkeitsfehler stark verringert

Digitale Regelungstechnik

$$\text{PID-Algorithmus: } y_k = y_{k-1} + \left(e_k - e_{k-1} \right) \left(1 + 2 \cdot \frac{T_r}{T} \right) + \frac{T_r}{T} e_{k-2}$$

$$\text{PID-Algorithmus: } y_{(k-T_s)} = K_R \cdot \left(x_{d(k-T_s)} + \frac{1}{T_n} \sum_{i=1}^k x_{d(i-T_s)} \cdot T_s + \frac{T_D}{T_s} \cdot (x_{d,k} - x_{d,k-1}) \right) + y_0$$

$$\text{PID-T}_1\text{-Geschwindigkeitsalgorithmus: } \Delta y_k = K_1 \cdot x_{d,k} + K_2 \cdot x_{d,k-1} + K_3 \cdot x_{d,k-2} + K_4 \cdot \Delta y_{k-1}$$

$$K_1 = K_R \cdot \left(1 + \frac{T_D}{T_n} + \frac{T_r}{T_s} \right) \cdot \frac{T_s}{T_D + T_r} \quad K_2 = -K_R \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{T_r}{T_s} \right) \cdot \frac{T_s}{T_D + T_r}$$

$$K_3 = K_R \cdot \frac{T_r}{T_D + T_r} \quad K_4 = \frac{T_r}{T_D + T_r}$$